東京医科歯科大学

2013 年度

数学　問題

1 以下の各問いに答えよ。

(1) 実数α，βが$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta = 1$を満たすとき，$\alpha + \beta$の値を求めよ。

(2) 実数α，β，γが$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$，$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha$$

の値は一定であることを示せ。

(3) 実数α，β，γが$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$，$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

2 　2 次正方行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のうち，次の 3 条件(i), (ii), (iii)を満たすもの全体の集合を M とする。

(i)　a，b，c，d はすべて整数

(ii)　$b + c = 0$

(iii)　$a - b - d = 0$

また E を 2 次単位行列とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　行列 A，B がともに M の要素であるとき，それらの積 AB も M の要素であることを示せ。

(2)　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるとき，$ad - bc = 1$ が成立することを示せ。

(3)　行列 A とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるような A をすべて求めよ。

(4)　自然数 n について，M の要素であって $A^n = E$ を満たすような行列 A の全体の集合を S_n とする。S_n の要素の個数がちょうど 3 となる n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ m, n を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を m, n を用いて表せ。

(3) a, b, c を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a,b,c)$ とする。次の2条件(i), (ii)が成立するとき，$M(a,b,c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

(i) $g(0)=g(1)=0$

(ii) $0<x<1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$

(4) m, n が2以上の自然数で $m>n$ であるとき

$$\frac{(m+n+1)!}{m!\,n!} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} > 2^{2n-1}$$

が成立することを示せ。