京都府立医科大　2003 年前期　数学

$\boxed{1}$

関数 f(x)を次で定める。

$f(x)=X+X^3$

X_0は整数であり、数列{Xn}を次のように定める。

$X_{n+1}=f(X_n)$　$(n=0、1、2、\cdots)$

このとき、すべての正の整数 n について、

$X_n-(-1)^nX_0$は３で割り切れることを証明せよ。

京都府立医科大　2003 年前期　数学

$\boxed{2}$

円 C は点 $P\left(a、\frac{1}{2}\right)(a > 0)$を中心とし、x 軸に接しているものとする。
円 C が曲線 $y = X^2$と 1 点のみを共有する（すなわち、接する）ような
a を求めよ。
さらに、この a に対して、円 C の外部で、x 軸と曲線 $y = X^2$と
円 C の円周とで囲まれた部分の面積を求めよ。

京都府立医科大　2003 年前期　数学

$\boxed{3}$　　1 から 7 までの番号が付けられた 7 枚のカードがある。A さんと B さんは次のように 3 枚のカードをでたらめに選ぶ。

　まず、Aさんは7枚のカードから3枚を選び、もとに戻す。

　次に、Bさんは7枚のカードから3枚を選ぶ。

この試行について、次の確率を既約分数で求めよ。

1）　　2人ともに選ばれたカードがちょうど3枚ある確率を求めよ。

2）　　2人ともに選ばれたカードがちょうど2枚ある確率を求めよ。

3）　　2人ともに選ばれたカードがちょうど1枚ある確率を求めよ。

4）　　2人ともに選ばれたカードがまったくない確率を求めよ。

5）　　番号1のカードが2人ともに選ばれる確率を求めよ。

6）　　番号1のカードがどちらか1人だけに選ばれる確率を求めよ。

7）　　番号1のカードがだれにも選ばれない確率を求めよ。

京都府立医科大　2003 年前期　数学

$\boxed{4}$

a は正の定数で、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$　とする。

xyz 空間において、
点 $A(a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$と x 軸を含む平面を α とし、
点 $B(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$と x 軸を含む平面を β とする。
原点を中心とし、半径 a の球面を S とする。
球面 T は、その中心が xz 平面上の $x > 0$ かつ $z > 0$ の部分にあり、
次を満たすとする。
球面 T は、平面 α、β と xy 平面に接し、球面 S に内接している。
このとき、次の問に答えよ。

１）　球面 T の半径 r を a と θ で表わせ。

２）　極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{r}{\theta}$　を求めよ。